

Argomenti di Ricerca

- Tesi di laurea: applicazione del metodo BEM al problema delle onde di Helmholtz.

L'attività svolta durante il periodo di tesi è stata rivolta all'estensione di alcuni risultati di applicazione del Metodo di Galerkin agli Elementi di Contorno (BEM), consolidati nell'ambito di problemi a potenziale, al caso dell'equazione di Helmholtz. In particolare ho utilizzato alcune formule di quadratura per il calcolo di integrali debolmente singolari e a valore principale di Cauchy, adatte alla messa a punto di tecniche di tipo h-, p- e h-p.

- 2005-2006: metodi numerici per la teoria cinetica estesa.

La teoria cinetica estesa riguarda la dinamica dei gas rarefatti in presenza di reazioni non conservative. Il principale obiettivo dell'attività sviluppata in questi due anni è stato quello di studiare il caso di una reazione chimica reversibile governata da equazioni iperboliche non lineari di tipo BGK: equazioni di Boltzmann in cui il termine collisionale è preponderante.

Assieme ai gruppi di Analisi Numerica e Fisica Matematica dell'Università di Parma, ho cercato di trovare una strategia numerica per riprodurre le soluzioni (di queste equazioni BGK) per miscele reattive. Ho focalizzato la mia attenzione su problemi a simmetria assiale che interessano molte applicazioni come per esempio il classico problema di evaporazione-condensazione. Il metodo che ho utilizzato si basa su tecniche di tipo "splitting", che sono ampiamente conosciute in analisi numerica per la risoluzione dell'equazione di Boltzmann classica ma sino ad allora non erano state applicate a sistemi cinetici che descrivano miscele di gas reattive.

Le tecniche di "splitting" hanno il vantaggio di semplificare il problema trattando separatamente le due fasi, il passo di convezione che ritrova la soluzione delle equazioni iperboliche omogenee lungo le linee caratteristiche e il passo di collisione che risolve le equazioni BGK spazialmente omogenee. La soluzione numerica di quest'ultima fase, che può essere vista come un problema di Cauchy, è stata valutata con metodi di Runge-Kutta espliciti di diversi ordini. Risultati numerici sono stati ottenuti in problemi di Riemann dipendenti dal tempo per miscele reattive di quattro gas.

- dal 2007 sino ad oggi: risoluzione numerica dell'equazione iperbolica delle onde transienti.

Nel 2007, ho iniziato ad approfondire e studiare i problemi di propagazione di onde elastiche in mezzi stratificati attraverso il metodo BEM. In particolare ho considerato la loro formulazione in termini di equazioni integrali di contorno direttamente nel dominio spazio-tempo.

Rispetto a problemi ellittici, l'aggiunta della variabile temporale produce specifiche difficoltà: oltre alle complessità pratiche dovute all'incremento della dimensione, appaiono nuovi problemi di stabilità. Relativamente all'applicazione del metodo degli elementi al contorno nel caso di problemi iperboliche, in letteratura si distinguono tre approcci: metodi basati sulla trasformata di Laplace, metodi di tipo time-step e metodi basati su una rappresentazione integrale direttamente nel dominio spazio-tempo. Quest'ultima strategia è stata applicata da diversi autori ma solo Bamberger e Ha Duong hanno fornito nel 1986 una formulazione debole con proprietà di convergenza.

▷ *formulazione "energetica"*

I primi risultati sono stati ottenuti attraverso una tecnica di approssimazione basata su una particolare formulazione debole che risale a considerazioni su proprietà dell'energia del sistema relativo al problema delle onde transienti e utilizza la soluzione fondamentale espressa direttamente nel dominio spazio-tempo. Grazie alla semplice struttura delle equazioni integrali

di contorno ottenute, è stato possibile dimostrare proprietà di coercività e continuità relativamente alla forma quadratica associata all'energia nel caso di domini 1D sia per problemi di Dirichlet che per problemi di Neumann e, di conseguenza, l'incondizionata stabilità degli schemi numerici derivati. Dal punto di vista numerico, questa stabilità è stata illustrata anche per problemi con condizioni di tipo misto e problemi di elastodinamica in mezzi stratificati ed è stata confrontata con la parziale instabilità di altre formulazioni.

La stessa formulazione è poi stata applicata a problemi 2D esterni sia con condizioni di tipo Dirichlet che Neumann attraverso una rappresentazione con potenziale rispettivamente a singolo e doppio strato e in problemi 2D interni con condizioni di tipo misto attraverso la formula di rappresentazione integrale completa. Con l'uso di trasformate di Fourier, risultati teorici di continuità e coercività parziale sono stati raggiunti nel caso semplificato di un dominio illimitato esterno ad un ostacolo piatto.

L'estensione della formulazione "energetica" a domini 3D ha costituito un passaggio impegnativo, sia per la gestione dell'incremento dimensionale, sia perchè le problematiche emerse in 2D (ad esempio di integrazione numerica e discretizzazione del contorno) richiedono, in questo contesto, strategie di risoluzione differenti. Le tecniche numeriche adottate sono state approfondite nel dettaglio e sono stati illustrati i risultati ottenuti per problemi interni ed esterni, rispettivamente.

▷ *schemi di integrazione numerica*

Tutte le simulazioni numeriche sono state realizzate usando una discretizzazione alla Galerkin del problema debole. L'approssimazione della soluzione analitica del problema integrale con funzioni polinomiali a tratti nel dominio spazio-tempo genera un sistema lineare con matrice triangolare inferiore a blocchi di tipo Toeplitz. La realizzazione di questa procedura implica, nel calcolo degli elementi della matrice, una doppia integrazione analitica nelle variabili temporali e successivamente la doppia integrazione numerica nelle variabili spaziali. Sono state analizzate in profondità le difficoltà dell'integrazione numerica dovute alla presenza di diversi tipi di singolarità e le strategie adottate per superarle e sono state illustrate, in particolare, opportune tecniche di quadratura per integrali ipersingolari sviluppate per ottenere un'adeguata precisione e affidabilità.

▷ *tecniche di accoppiamento*

In presenza di regioni costituite da materiali diversi o comportamenti differenti, la decomposizione in sottodomini può risultare sia necessaria che vantaggiosa per aumentare l'efficienza e sfruttare strumenti di calcolo in parallelo. In questo ambito, applicare il metodo BEM significa disporre di uno strumento naturale di imposizione delle condizioni all'interfaccia: continuità per l'incognita principale e compatibilità per la sua derivata, poichè queste variabili compaiono direttamente nella formulazione integrale di contorno. Sono quindi stati illustrati i risultati ottenuti in 2D sviluppando una tecnica di accoppiamento BEM-BEM nel contesto della formulazione "energetica".

Qualora tuttavia si vogliono sfruttare sia i vantaggi del metodo BEM (accuratezza, implicito soddisfacimento delle condizioni di radiazione all'infinito, risparmio computazionale) sia i vantaggi del metodo agli elementi finiti (FEM) nel trattare non-linearità localizzate, si può adottare una tecnica di accoppiamento BEM-FEM "energetica" considerando anche l'estensione a problemi con dissipazione.

▷ *tecniche Fast*

Poichè l'obiettivo futuro è quello di poter estendere l'ambito di applicazione della formulazione energetica a simulazioni sempre più elaborate, occorre sviluppare tecniche fast per la costruzione e la risoluzione di sistemi lineari derivanti da Boundary Integral Equations.

A questo proposito, al congresso ECCM 2010 di Parigi sono stati esposti i primi risultati

ottenuti, grazie al finanziamento GNCS di un progetto di ricerca [PR2] (di cui sono stata coordinatrice), applicando il metodo delle matrici di restrizione a problemi con simmetrie geometriche, mostrando una effettiva riduzione dei costi computazionali senza perdita di precisione. Al congresso ECCOMAS 2012 e al congresso WAVES 2013, è stata illustrata la possibilità di avvalersi di questa tecnica anche in problemi 3D e anche sfruttando le simmetrie dei solidi platonici.

E' stata inoltre approfondita una tecnica basata su algoritmi FFT per la risoluzione accelerata di sistemi lineari derivanti dalla discretizzazione di problemi di propagazione di onde che si basa sulla particolare forma delle matrici di tipo Toeplitz.

Concludendo, i numerosi risultati numerici ottenuti in 1D, 2D e 3D, sono stati confrontati con i risultati presenti in letteratura con riscontri fortemente positivi: la formulazione "energetica" appare stabile in ogni dimensione e indipendentemente dai parametri del modello e della discretizzazione.

- dal *01 marzo 2013*: metodi numerici per modelli finanziari.

Un tema di ricerca in espansione è l'adeguamento di tecniche numeriche consolidate in ambito fisico e ingegneristico ai modelli differenziali sviluppati nell'ambito della Finanza Quantitativa. In particolare il metodo degli elementi al contorno è stato adattato per la valutazione efficiente di opzioni finanziarie con barriera nell'ambito del modello di Black-Scholes. Il vantaggio del metodo BEM di poter valutare la soluzione "puntualmente" anziché globalmente si accentua nel contesto della Finanza Quantitativa maggiormente rispetto a contesti ingegneristici poiché si ha interesse a conoscere la soluzione solo per determinati valori della variabile indipendente "spaziale" (il titolo azionario sottostante) e, pur trattandosi di un problema dipendente dal tempo, solo all'istante della valutazione e non la sua evoluzione durante tutto l'intervallo di validità dell'opzione. L'efficienza e accuratezza del metodo numerico adottato in confronto ad altre strategie numeriche riportate in letteratura (tipicamente metodi alle differenze finite) è stata investigata approfonditamente.

Pur essendo il modello di Black-Scholes ancora largamente utilizzato nella pratica, tuttavia la letteratura accademica ne ha evidenziato i forti limiti ed è quindi stato superato da modelli più recenti: quali, ad esempio, il modello di Heston e quello di Bates. L'estensione del metodo numerico proposto a questi modelli più complessi è stato oggetto di ricerca nell'ambito del progetto GNCS [PR1] e risultati sono stati presentati in convegni internazionali.

Progetti Finanziati

- PR1. Programma Giovani Ricercatori (GNCS-2013): *Approccio mediante equazioni integrali alla risoluzione numerica di problemi di Finanza Quantitativa*;
coordinatore: Dott.ssa C. Guardasoni.
- PR2. Programma Giovani Ricercatori (GNCS-2010): *Applicazione delle matrici di restrizione nel metodo degli elementi di contorno per problemi evolutivi*;
coordinatore: Dott.ssa C. Guardasoni.
- PR3. Progetti di Ricerca GNCS-2013: *Metodi fast per la risoluzione numerica di sistemi di equazioni integro-differenziali*;
coordinatore: Dott.ssa A. Aimi.
- PR4. Progetti di Ricerca GNCS-2012: *Accoppiamento di metodi numerici per BIEs e PDEs relative a problemi evolutivi esterni e multistrato*;
coordinatore: Dott.ssa A. Aimi.

- PR5. Progetti di Ricerca GNCS-2011: *Tecniche numeriche per problemi di propagazione di onde elastiche in multidomini*;
coordinatore: Dott.ssa A. Aimi.
- PR6. Programma di Ricerca Scientifica di Rilevante Interesse Nazionale (PRIN 2009): *Tecniche numeriche BEM per problemi di propagazione di onde elastiche*;
coordinatore unità di Parma: Prof. M. Diligenti.
- PR7. Programma di Ricerca Scientifica di Rilevante Interesse Nazionale (PRIN 2007): *Tecniche numeriche BEM per problemi di propagazione di onde elastiche*;
coordinatore unità di Parma: Prof. M. Diligenti.
- PR8. Programma di Ricerca Scientifica di Rilevante Interesse Nazionale (PRIN 2007): *Metodi numerici avanzati per equazioni di evoluzione e problemi multiscala*;
coordinatore unità di Milano: Prof. G. Naldi.

Parma, 30 dicembre 2014